Биологические исследования представляют собой, в частности, упражнения по эстетике природы. Занимаясь биологией, мы получаем удовольствие главным образом от того, что снова и снова осознаем, насколько экономичны, изящны и целесообразны те механизмы, которые случайно возникли в ходе эволюции и были закреплены отбором.

Дэвид Балтимор. Нобелевская лекция, 1976 г.

Долгое время язык геометрии Эвклида казался естествоиспытателям вполне соответствующим описываемому им многообразию форм окружающего мира. Галилео Галилей писал: «Великая книга Природы всегда лежит раскрытая перед нашими глазами, и истинная философия записана в ней… Но мы не можем прочитать ее, если не выучим сперва языка и символов, с помощью которых она написана… Она написана на языке математики, а буквы ее – треугольники, круги и другие геометрические фигуры.» Но Природа (в которой найти правильный треугольник или круг весьма непросто) в ответ пошутила над математиками. Оказалось, что созданные в конце XIX – начале XX геометрические формы, воспринимавшиеся многими как патологические (Рис.1), являются основой для множества реальных, окружающих нас объектов.

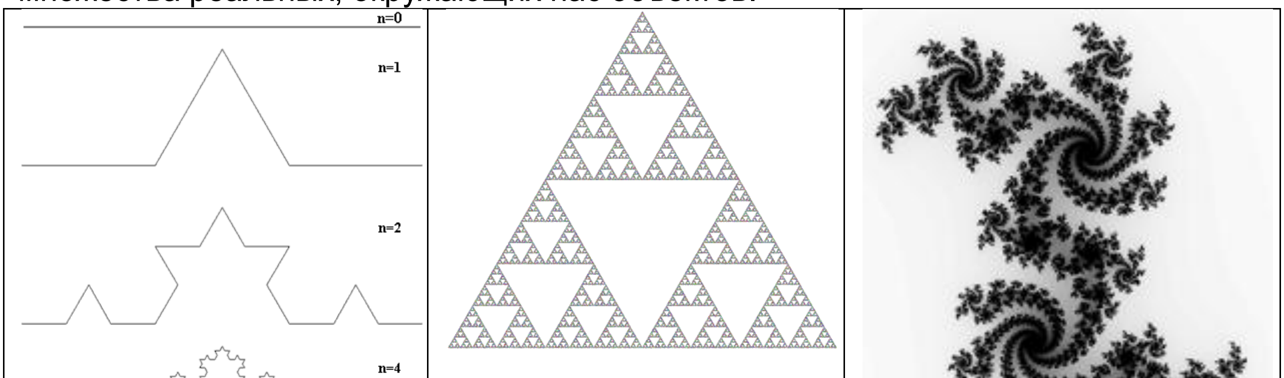

Рис. 1. Линия Коха, треугольник Серпиньского, множество Жюлиа

Современный этап изучения этих структур связан с работами Бенуа Б. Мандельброта, сотрудника Исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM в Йорктаун-Хейтсе (шт. Нью-Йорк). Термин “фрактал” был введен Мандельбротом в 1975 г. Он происходит от латинского слова *fractal*, прилагательного от глагола *Fractale*, что значит “ломать, разбивать”: *фрактальным* называется геометрический объект с дробной разреженной структурой. Понятие фракталов стало особенно популярным в 1983 г., после публикации книга Мандельброта “Фрактальная геометрия природы”.

Фракталы – один из языков геометрии. Если классическая, эвклидова геометрия оперирует первичными формами (прямые, окружности, треугольники), то основой языка фракталов являются алгоритмы, правила преобразования. Чтобы лучше представить принцип построения фрактальных структур, представим себе копировальную машину, которая может преобразовывать копируемое изображение по определенным правилам: уменьшать, поворачивать, копировать несколько раз, размещать определенным образом. Полученные в результате фигуры на следующем шаге (итерации) подвергаются изменениям по тем же правилам; процесс повторяется многократно, пока изображение практически не будет изменяться (будет достигнут *предельный фрактал*[1]). Например, если поместить в такую машину черный равносторонний треугольник и задать правило: фигура уменьшается наполовину и копируется трижды, по копии в каждую вершину исходного треугольника, то после первой итерации получится равносторонний треугольник, сложенный из четырех меньших: три по углам будут черными, а четвертый, посередине – белым. На следующем шаге копировальная машина превратит каждый черный треугольник снова в три вполовину меньших и разместит по тому же правилу; в результате пяти-шести итераций проступит форма *треугольника Серпиньского*. (Фигура названа в честь польского математика Вацлава Серпиньского, который впервые описал его в 1916 г.). Обычный прямоугольник машина копирует, преобразуя в четыре меньших по размеру и повернутых по определенными углами (рис. 2а), порождая в результате фрактал, очень похожий на лист папоротника. Аналогично на рис. 2б строится фрактальное дерево, напоминающее дихотомическим ветвлением ископаемый астероксилон.

Одно из свойств фракталов можно увидеть на этом примере сразу: компактность описания. Вместо того, чтобы описывать лист папоротника по точкам (например, при сканировании гербарного экземпляра): от сотен тысяч до миллионов точек, пикселей – а значит, такого же количества значений, для фрактального описания достаточно использовать простое правило преобразования с 24 коэффициентами (см. рис. 2, вверху). Коэффициенты эти нуждаются в пояснении: в рассмотренных выше фрактальных преобразованиях координаты точки новой итерации (x'; y') определяются по координатам исходной точки (x; y) таким преобразованием:

$$x' = a \times x + b \times y + e$$
$$y' = c \times x + d \times y + f$$

Шесть коэффициентов (a, b, c, d, e, f), представленных в этих уравнениях, и задают правила преобразования в фрактальном «листе папоротника» (с тем небольшим уточнением, что каждая точка преобразуется в четыре новых, поэтому мы видим четыре ряда коэффициентов для преобразования).

[1] Заметим, что предельный фрактал практически не зависит от исходного изображения: уже после небольшого числа итераций исходное изображение перестает быть узнаваемым, и вырисовывается результат преобразований, обусловленный алгоритмом.

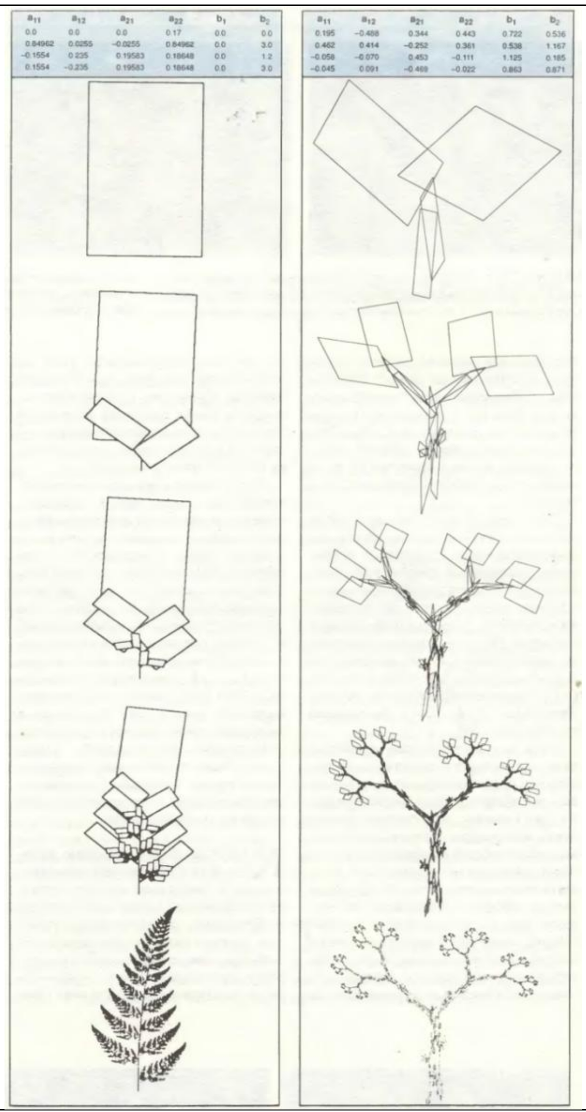

Рис. 2 Порождение фракталов копировальной машиной

Рис. 3. Папоротник

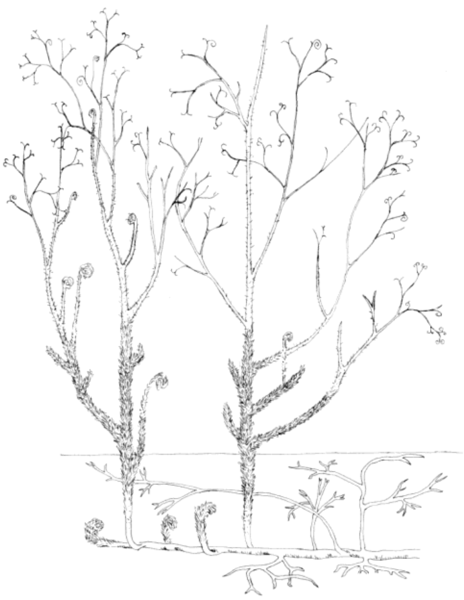

Рис. 4. Астероксилон

Приведенные примеры, объединенные принципом многократно копировальной машины, относятся к классу линейных фракталов (посмотрите уравнения: они не содержат квадратичных и более сложных функций). Их исследованию посвящена практическая работа (см. в конце статьи и на диске). В нелинейных фракталах используются более сложные преобразования. Теорию квадратичного диалекта фракталов описал в 1918 г. французский математик Гастон Жюлиа, находившийся на излечении в госпитале после ранений, полученных на фронте во время первой мировой войны. Множества Жюлиа — это фрактальные границы, возникающие в результате многократного выполнения квадратичного преобразования $z^2 + c$, которые принимают разнообразные удивительные формы (см. рис.1.). Форма множеств Жюлиа определяется только значением числа *c*, которое называют *управляющим параметром*. Такие фракталы тоже могут быть построены с помощью копировальной машины с многократным уменьшением; однако линзы в этом случае не просто уменьшают изображение, а искажают его, дробят и переносят; прямые линии становятся кривыми, и из одного исходного изображения получаются два (четыре, восемь…) более мелких. Но, как и в случае линейных фракталов, предельное изображение не зависит от конкретного исходного изображения, а полностью определяется выбором параметра *c*.

Удивительное разнообразие геометрических форм, которые порождает квадратичный диалект, тесно связано с современной теорией хаоса, согласно которой многие явления, несмотря на то, что они следуют четким правилам, в принципе оказываются непредсказуемыми[2]. Соответствие между фракталами и хаосом не случайно: фрактальная геометрия — это геометрия хаоса. Тема эта интересовала математиков достаточно давно: в приведенной ниже цитате за Льюисом Кэрролом проступает Чарльз Лутвидж Доджсон:

> – Я только хотел сказать,– обиженно проговорил Дронт, что в нашем положении лучшее средство просохнуть – это, конечно, устроить Кросс но Инстанциям…
>
> Так как вам, может быть, тоже захочется попробовать в морозный денек, что это за штука Кросс по Инстанциям, я расскажу, что Дронт сделал. Прежде всего он, как он выразился, "разметил инстанцию",- то есть нарисовал на земле круг (не очень ровный, но "точность тут не обязательна", сказал Дронт). Далее он расставил всех присутствующих по этому кругу (строго как попало). А потом... Вы, наверное, думаете: скомандовал "раз-два-три - марш!". Ничего подобного! Все начали бегать когда кому захотелось, и бежали кто куда хотел, и останавливались когда кто пожелает.
>
> *Льюис Кэрролл. Алиса в стране чудес (Пер. Б. Заходера)*

Если действительно в *морозный денек* попробовать предложенную Дронтом игру (отлично, если накануне выпадет снежок), то, если удастся взглянуть с высокой точки, возможно, вместо беспорядочного нагромождения отпечатков вашему взору предстанет вполне эстетичный и по-своему упорядоченный рисунок (Рис. 6).

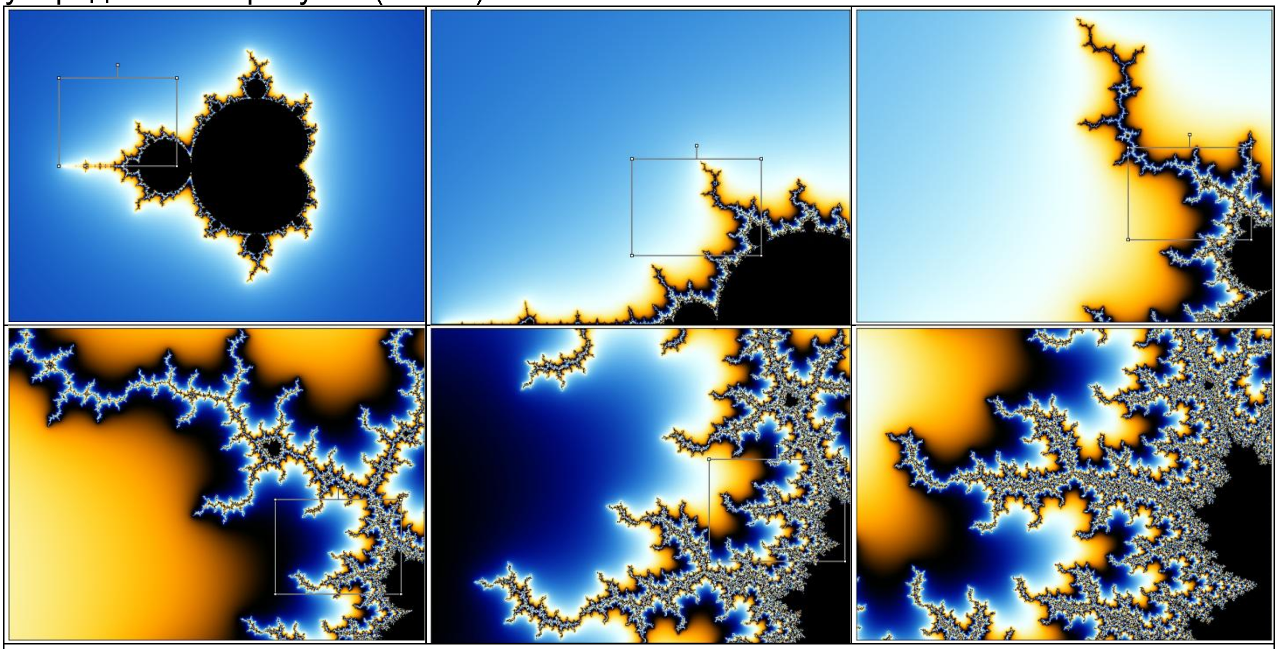

Рис. 6. Множества Мандельброта. Каждая точка множества Мандельброта представляет значение параметра *c*, порождающего множество Жюлиа с определенными свойствами. Множество Мандельброта содержит в себе огромное богатство мельчайших деталей. На рисунке – ряд последовательных увеличений одного из фрагментов (отмечены прямоугольниками). Рисунок получен с помощью программы Ultra Fractal 5.04 (trial version).

[2] Среди применений этого подхода в нематематических (*не*-чисто математических) областях – использование фрактальных аналогий и моделей Таллемом Насибом в книге «Черный лебедь», полностью посвященной непредсказуемым событиям (в экономике и жизни вообще).

Рисунок 6 иллюстрирует еще одно замечательное свойство фрактальных изображений – самоподобие, или *инвариантность по отношению к масштабу*[3]. Если рассматривать такие объекты в различном масштабе, то на каждом уровне обнаруживаются одни и те же элементы; это свойство определяется дробной размерностью структуры фрактала. Например, если посмотреть на две фотографии дендритов нейрона с разным увеличением, то будет непросто решить, какая фотография соответствует большему, а какая – меньшему увеличению. Самоподобны (хотя и не идентичны) ворсинки всасывающей поверхности кишечника, повторяющиеся на разных уровнях масштаба вплоть до микроворсинок, образованных плазматической мембраной клеток.

Фракталы часто представляют собой след хаотических динамических процессов. Где бы в природе в результате хаотического процесса ни формировался тот или иной элемент природной среды (берег моря, атмосфера, горы), повсюду с большой вероятностью можно обнаружить фрактальные структуры (в контуре береговой линии, в форме облаков, в конфигурации скальных образований – рис. 7.).

Рис. 7. Природные объекты фракталоподобной формы

Фракталоподобные образования можно обнаружить и в человеческом организме, например, в структуре кровеносных сосудов и протоков, в нервной системе, в бронхиальном древе лёгких (рис. 8.): математический анализ ветвления дыхательных путей показал, что оно имеет фрактальную геометрию.

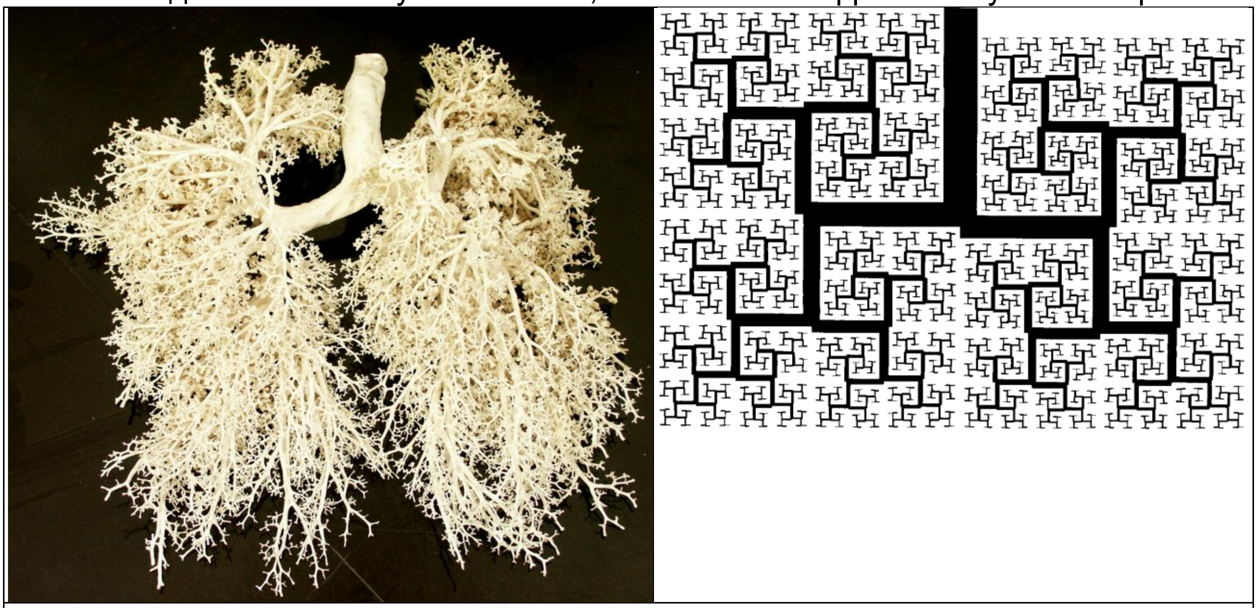

Рис. 8. Муляж бронхиального древа лёгких человека и иллюстрация из книги Бенуа Мандельброта «Фрактальная геометрия природы».

Эффектные примеры «фрактализации» структуры организмов дает изучение ряда палеонтологических объектов. У аммонитов, как известно, раковина была разделена перегородками, и сам моллюск жил только в последней камере. Перегородки образовывали со стенкой раковины т.н. лопастную линию, которая в процессе эволюции в лучших традициях кривой Коха (рис. 1.) всё искривлялась и *фрактализировалась*: у палеоаммоноидей была только слегка

[3] Строго говоря, в отличие от треугольника Серпиньского или фрактального «листа папоротника», множество Мандельброта не является строго самоподобным: оно скорее *подобное*, похожее на каждом уровне масштабирования, чем точно повторяющее предыдущий/последующий уровни.

изогнутой, у мезоаммоноидей начала давать складки и ворсинки, а у неоаммоноидей образовала сложные ветвящиеся структуры. Хотя традиционным является объяснение такого изменения его адаптивностью ("биологическое значение лопастной линии состоит в общем укреплении ее гофрированием"[4]), однако такая структурированность перегородок неоаммоноидей всё-таки представляется чрезмерной, а значит, и не обоснованной напрямую целесообразностью.

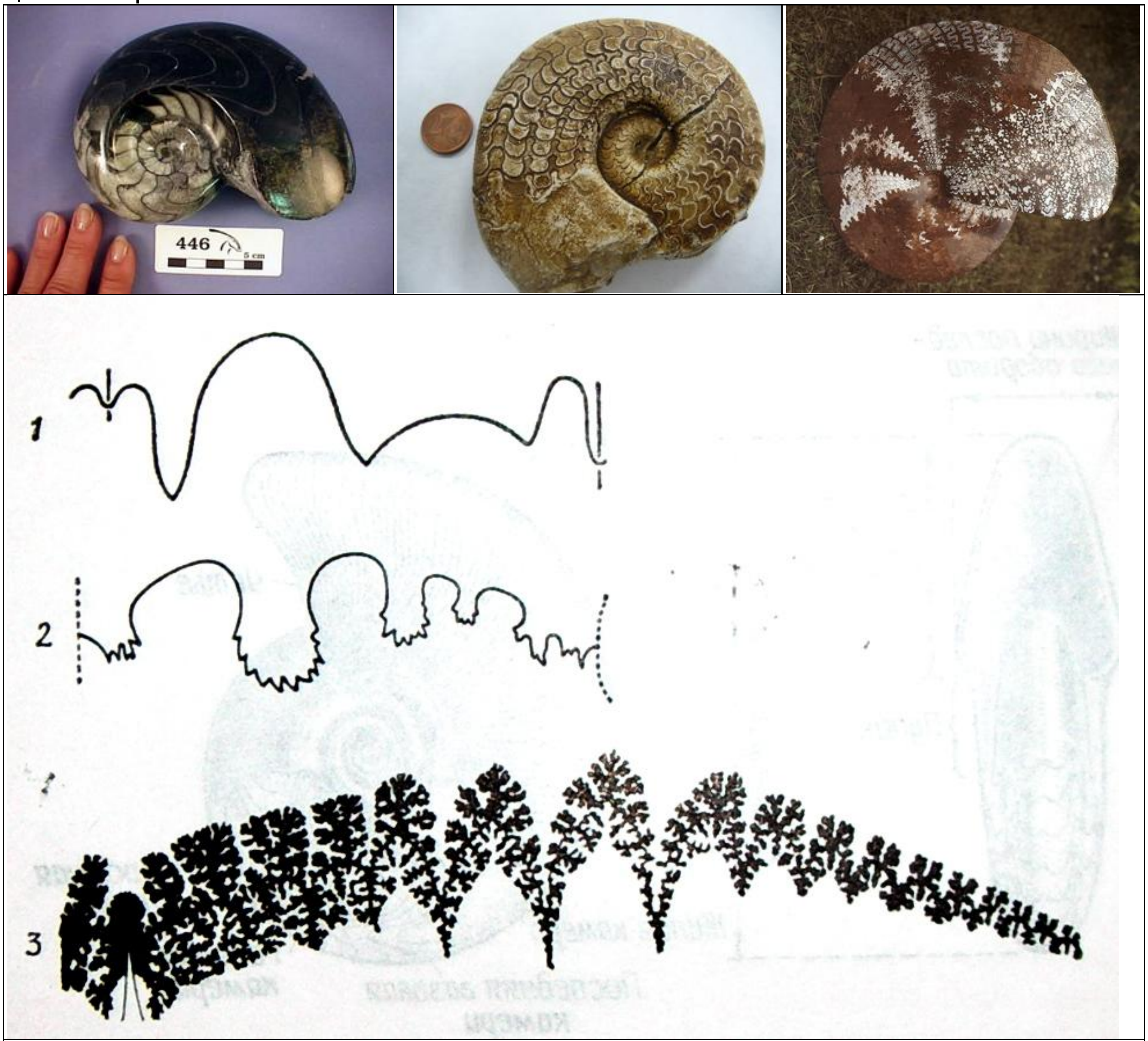

Рис. 9. Лопастная (шовная) линия аммонитов: вверху слева направо: Manticoceras sp. (палеоаммоноидеи), Ceratites sp. (мезоаммоноидеи), Pinacoceras metternichi (неоаммоноидеи); внизу: схема изменения лопастной линии аммонитов (из кн. Крумбигель Г., Вальтер Х. Ископаемые. Сбор, препарирование, определение, использование – М.: Мир, 1980, - 335 с.)

Пример аммонитов заставляет задуматься над важным вопросом соотношения математической модели и реального объекта. Не следует думать, что, по аналогии с известным высказыванием Эйнштейна («Господь Бог вычисляет интегралы эмпирически»[5]), фрактальные преобразования осуществляются в горообразовательных процессах или в онтогенезе по

---

[4] Крумбигель Г., Вальтер Х. Ископаемые. Сбор, препарирование, определение, использование – М.: Мир, 1980, - 335 с.

[5] Хотя и полностью отрицать возможность *эмпирического* вычисления фракталов также нельзя – см. фронтиспис «Нравственной Библии» XIII в. (Австрийская национальная библиотека) - рис. 10.

специально заложенному алгоритму. Скорее наоборот: в тех случаях, когда протекание какого-то процесса допускает достаточную степень случайности, мы видим фракталоподобные структуры. Возможно, это – «домашняя заготовка» природы, не требующая особого кодирования и применяемая *по умолчанию*, пока не найдены более эффективные генетически детерминированные решения? «Повторяемость структуры является наиболее примитивным способом её усложнения, поэтому мы повсеместно встречаем явления вроде ветвления и сегментации»[6]. Поэтому самые яркие примеры самоподобных структур в биологии – отнюдь не у прогрессивных групп: аммонитов (вымерли), папоротников (реликты), дихотомическое ветвление – у вымерших папортотникообразных, жилкование – только у реликта гинго и т.п… И даже выведенная в 1990-х годах голландскими селекционерами капуста романеско (рис. 11) – тоже скорее пример не проверенного отбором, *избыточного* решения. То же бронхиальное древо может ветвиться в значительной степени случайно (т.е. фрактально), пока решается задача заполнения объема с достаточным количеством/площадью альвеол на концах, но когда задача оптимизируется, как в легких птиц – тут уж не до красивостей и случайностей…

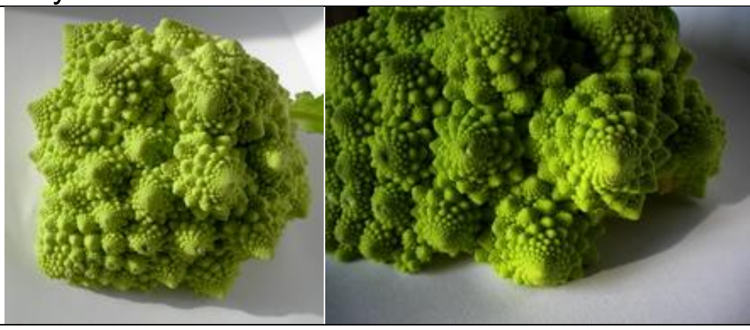

Рис. 11. Капуста романеско. Фото автора.

Безусловно, это не отменяет ни эффективности использования фрактальных преобразований для сжатия изображений и моделирования процессов и явлений, ни полезности языка фрактальной геометрии для описания ряда биологических объектов и явлений. Но многообразие природных (и биологических в том числе) форм и функций не сводимо ни к языку эвклидовой геометрии, мыслившей треугольниками и окружностями, ни – к фрактальной.

[6] Из письма Максима Чинякина, автора программы LS IFS, используемой в практической работе.

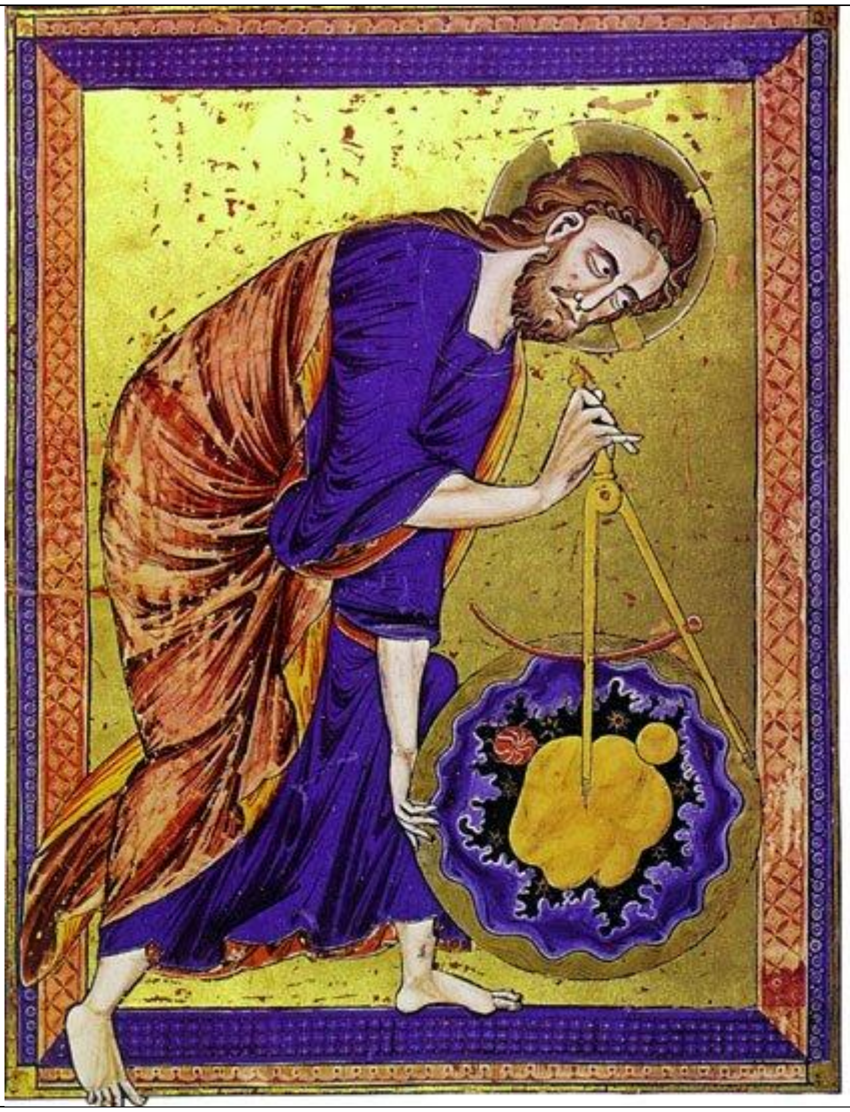

Рис. 10. Фронтиспис «Нравственной Библии» XIII в. (Австрийская национальная библиотека).

Литература:

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002, - 656 с.
Марков А. О фрактальности жизни и жизненности фракталов / Элементы. Популярные синопсисы (По статье: Б. А. Богатых Фрактальные структуры живого и эволюционный процесс // Журнал общей биологии. Том 67, 2006. № 4, июль-август. Стр. 243-255) – http://elementy.ru/genbio/synopsis?artid=23
Юрген Х., Пайтген Х.-О., Заупе Д. Язык фракталов // "В мире науки, 1990, № 10, С. 32.
Голдбергер Э. Л., Ригни Д. Р., Уэст Б. Дж. Хаос и фракталы в физиологии человека //"В мире науки, 1990, № 10.
Сандер Л.М. "Фрактальный рост" // "В мире науки, 1987, № 3, С. 62.

Программы генерации фракталов: http://fraktalz.narod.ru/programs.html и http://fractalfoundation.org/resources/fractal-software/.
Статья о фрактальных объектах в природе: http://www.wired.com/wiredscience/2010/09/fractal-patterns-in-nature/
Мандельбалб – трехмерная визуализация фрактальных множеств: http://art-of-arts.livejournal.com/333452.html